MINISTERE DE L'EQUIPEMENT

E.I. T.P.E. 1975

B

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES BIS

(temps accordé : 3 heures)

PREMIERE PARTIE

On considère le système différentiel

$$(I)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ y' = \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

a, b, c, d étant des constantes telles que $ad - bc \neq 0$

On étudie les courbes de $\mathbb{R}^2$ décrites par le point $[x(t), y(t)]$ solution du système (I).

Différentes configurations se présentent suivant la valeur des constantes a, b, c, d et la position du point (x_0, y_0) au temps $t = 0$.

Question I.1

(Configuration 1) : $(a - d)^2 + 4\,bc > 0$ et $ad - bc > 0$

Montrer qu'alors le système (I) peut se ramener par une transformation linéaire

à $\begin{cases} X' = \lambda_1 X \\ Y' = \lambda_2 Y \end{cases}$ et $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ (quitte à changer t en $-t$)

Etudier l'allure des courbes solutions suivant la position de (X_0, Y_0).

(Dans cette configuration on dit que l'origine 0 est un noeud.)

Question I,2

(Configuration 2) : $(a - d)^2 + 4bc > 0$ et $ad - bc < 0$

Montrer qu'on peut de la même façon se ramener par une transformation linéaire

à $\begin{cases} X' = \lambda_1 X \\ Y' = \lambda_2 Y \end{cases}$ et $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$

Etudier l'allure des courbes solutions suivant la position de (X_0, Y_0)

(Dans cette configuration on dit que l'origine 0 est un col)

Question I,3

(Configuration 3) : $(a - d)^2 + 4bc < 0$ et $a + d \neq 0$

Montrer qu'on peut se ramener par une transformation linéaire à

$$\begin{cases} X' = \lambda X - \mu Y \\ Y' = \mu X + \lambda Y \end{cases}$$

Montrer en passant en coordonnées polaires que les courbes tendent vers l'origine suivant des spirales $(\rho = Ce^{k\theta})$.

(Dans cette configuration on dit que l'origine est un foyer).

Question I,4

(Configuration 4) : $(a - d)^2 + 4bc < 0$ $a + d = 0$

Montrer qu'on se ramène à $\begin{cases} X' = -\mu Y \\ Y' = \mu X \end{cases}$

Etudier les courbes solutions.

(Dans cette configuration on dit que l'origine 0 est un centre).

Question I,5

(Configuration 5) : $(a - d)^2 + 4bc = 0$ $a - d \neq 0$

Montrer qu'on se ramène à $\begin{cases} X' = \lambda(X + Y) \\ Y' = \lambda Y \end{cases}$ et $\lambda > 0$

Montrer que l'origine est un noeud.

Question I,6

(Configuration 6) : $a = d$
$b = c = 0$

Etudier les courbes solutions.

DEUXIEME PARTIE

On considère le système

$$(II)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt} = ax + by + F(x,y) \\ y' = \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + G(x,y) \end{cases}$$

a, b, c, d étant des constantes telles que $ad - bc \neq 0$

F et G sont des fonctions de x et y
- continues dans un voisinage de 0
- qui s'annulent simultanément pour $x = y = 0$
- telles que $\dfrac{F(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\dfrac{G(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

tendent uniformément vers 0 quand x et y tendent vers 0.

Aucune démonstration n'est demandée concernant les configurations 1, 2, 3.

Question II,1

(Configuration 4) : $(a - d)^2 + 4bc < 0$ $\qquad a + d = 0$

On ne peut rien conclure comme le prouvera la résolution des 3 exemples suivants : (il est inutile de donner les expressions de x et y en fonction de t).

1) $\begin{cases} x' = y + 2y^3 \\ y' = -x - 2x^3 \end{cases}$ L'origine est un centre

2) $\begin{cases} x' = y + x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$ L'origine est un foyer

3) $\begin{cases} x' = y - x\sqrt{x^2 + y^2} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y' = -x - y\sqrt{x^2 + y^2} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$

Question II,2

(Configurations 5 et 6)

Les hypothèses faites sont insuffisantes pour affirmer que l'origine sera un noeud. L'exemple suivant le prouve.

Résoudre $\begin{cases} x' = -x + \dfrac{y}{\operatorname{Log}\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y' = -y - \dfrac{x}{\operatorname{Log}\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$

Mais on démontrera que les courbes solutions atteignent l'origine pourvu qu'elles s'en rapprochent suffisamment.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail